

# 高雄大學應用數學系

## 每月挑戰 004-006

2012 年十月

徵答收件截止時間：2012/11/30.

1. 每個月將公布若干個數學問題徵答，由系上老師出題，歡迎同學來挑戰。
2. 同學解出任何一題皆可將解答投稿到系辦（答案紙格式可於系網頁上下載）。系上將擇優公布優良解答，並公開表揚優秀解題同學。

### 004

Let  $a_1, a_2, \dots$  be positive numbers such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Prove that there are positive numbers  $c_1, c_2, \dots$  such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n < +\infty.$$

[施信宏教授出題]

### 005

Prove that, for  $n \geq 0$ ,

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} = 2.$$

[鄭斯恩教授出題]

### 006

Let  $x, y \in \mathbb{R}^N$  be a unit vector. Define the matrix  $H(\alpha)$  by

$$H(\alpha) = I - \alpha xy^T.$$

- a. Show that if  $\alpha y^T x \neq 1$ , then  $H(\alpha)$  is invertible.
- b. Find  $H(\alpha)^{-1}$  when  $\alpha y^T x \neq 1$ .

[郭岳承教授出題]