

高雄大學應用數學系

每月挑戰 010-012

2012 年十二月

1. 每個月將公布若干個數學問題徵答，由系上老師出題，歡迎同學來挑戰。
2. 同學解出任何一題皆可將解答投稿到系辦（答案紙格式可於系網頁上下載）。系上將擇優公布優良解答，並公開表揚優秀解題同學。

010

Let $x(t)$ and $y(t)$ are two functions defined on $[0, \infty)$ and L is a nonnegative constant. Assume $x(t)$ and $y(t)$ satisfy the following initial-valued problem of ODE,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + \frac{L}{1+y} \\ \frac{dy}{dt} = -y + 2x \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases},$$

please prove that $x(t)$ and $y(t)$ must be nonnegative functions if $x_0 \geq 0$ and $y_0 \geq 0$.

[劉欽岳教授出題]

011

某公司為爭取市佔率推出 N 種不同樣式的公仔，消費者每次消費滿 100 元即可免費抽取一個公仔，假設每次抽取時每個公仔被抽到的機率相同，今小明共收集 n 個公仔，試問在這 n 個公仔中，不同樣式公仔的期望個數為何？

[黃士峰教授出題]

012

Prove that the eigenvalues of $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ lie in the union of the n disks in the complex plane

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

[陳晴玉教授出題]