NUK Math 徵答 005 解答

鄭斯恩

December 18, 2012

問題 005

Prove that, for $n \geq 0$,

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}2^{n-2k}=2.$$

連威翔的解法

(A)

當 $n\geq 2$ 時, $\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}2^{n-2k}=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\left[\frac{n-k}{n-k}+\frac{k}{n-k}\right]\binom{n-k}{k}2^{n-2k}$

$$=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n-k}{k}2^{n-2k}+\sum_{k\geq 1}(-1)^k\frac{k}{n-k}\binom{n-k}{k}2^{n-2k}$$

$$=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n-k}{k}2^{n-2k}+\sum_{k\geq 1}(-1)^k\binom{n-k-1}{k-1}2^{n-2k}$$

$\because \frac{k}{n-k}\binom{n-k}{k}=\frac{k}{n-k}\cdot\frac{(n-k)!}{k!\,(n-2k)!}$
$=\frac{(n-k-1)!}{(k-1)!\,[(n-k-1)-(k-1)]!}$
$=\binom{n-k-1}{k-1}$

令 $K=k-1$, 則 $k=K+1$, 且

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^k\binom{n-k-1}{k-1}2^{n-2k}=\sum_{K\geq 0}(-1)^{K+1}\binom{n-2-K}{K}2^{n-2-2K}$$

因此, $\boxed{\text{原式}}=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n-k}{k}2^{n-2k}-\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n-2-k}{k}2^{n-2-2k}$

(B) 令 $A_n=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n-k}{k}2^{n-2k}$, 則 $\boxed{\text{原式}}$ 在 $n\geq 2$ 時, 有

$\boxed{\text{原式}}=A_n-A_{n-2}\cdots①$. 不難計算出 A_0 及 A_1 的值如下:

$A_0=\binom{0}{0}2^0=1$, $A_1=\binom{1}{0}2^1=2$. 觀察 A_{n+2} 並推導如下: (其中 $n\geq 0$)

$$A_{n+2}=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n+2-k}{k}2^{n+2-2k}=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\left[\binom{n+1-k}{k}+\binom{n+1-k}{k-1}\right]2^{n+2-2k}$$

$$=2\cdot\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n+1-k}{k}2^{n+1-2k}+\sum_{k\geq 1}(-1)^k\binom{n+1-k}{k-1}2^{n+2-2k}\cdots\cdots②$$

令 $K=k-1$, 則 $k=K+1$, 且 $\sum_{k\geq 1}(-1)^k\binom{n+1-k}{k-1}2^{n+2-2k}$

$$=\sum_{K\geq 0}(-1)^{K+1}\binom{n-K}{K}2^{n-2K}=-\sum_{K\geq 0}(-1)^K\binom{n-K}{K}2^{n-2K}=-A_n\cdots③$$

由②,③可知 $A_{n+2}=2A_{n+1}-A_n \Rightarrow A_{n+2}-A_{n+1}=A_{n+1}-A_n$, $n\geq 0$

因此 $\langle A_n \rangle$ 為等差數列，公差 $d=A_1-A_0=2-1=1$,

回到①，即知 $\boxed{\text{原式}}=A_n-A_{n-2}=2d=2$，其中 $n\geq 2$.

(c) 當 $n=0$ 及 $n=1$ 時，$\boxed{\text{原式}}$ 之值分別為

$(-1)^0\frac{0}{0}\binom{0}{0}2^0$ 無意義，以及 $(-1)^0\frac{1}{1-0}\binom{1-0}{0}2^1=2$.

由以上可知在 $n\geq 1$ 時，

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}2^{n-2k}=2 \quad \text{恆成立.}$$

☆ 原題目寫「for $n\geq 0$」，個人認為應改為「for $n\geq 1$」，謝謝!

除非特地將 $\frac{0}{0}$ 定為2，則沒問題。

答題優良名單

博士班：連威翔

大三(103 級)：翁嘉駿