

NUK Math 徵答 017 解答

張惠蘭

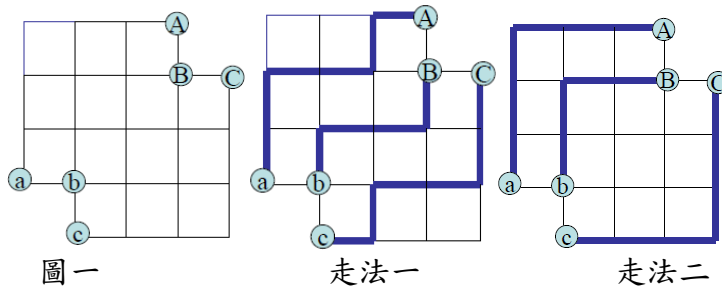
問題 017

在圖一的棋盤上，從 a 走到 A、b 走到 B、c 走到 C，任一路徑上的每一步只能向上或向右走，此外這三條路徑需符合下列兩個條件：

1. 三條路徑(a 至 A, b 至 B, c 至 C)互不相交，
2. 旋轉 180 度後，三路徑重疊。

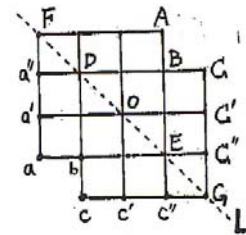
例如，走法一是符合規則的一組路徑；走法二則是不合法的一組路徑，因旋轉 180 度後 b 至 B 的路徑無重疊。

試問有多少組符合條件的路徑？



解 1: 連威翔的解法

(1) 依題目所給條件②，可知將右圖虛線左下側半邊的路徑旋轉 180 度，即可得另一半的路徑。因此，只須考慮 L 左邊有幾種可能的路徑。



(2) 因為走捷徑的關係，可知從 b 至 B 的路徑只能通過直線 L 一次。而若從 b 開始的路徑到達 D 或 E，將分別使 L 右側的路徑出現 E 至 B 或 D 至 B，這樣將導致路徑通過虛線兩次以上，此為矛盾。因此，從 b 開始的路徑必過 O 點，有「右→上」及「上→右」兩種走法。

(註：(2) 旨在討論 b 至 B 的路徑)

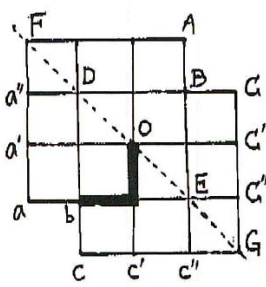
(3) 討論 (2) 中 b 的兩種走法下，a, c 的走法：

(a) b 出發後走「右→上」至 O：此時 a 須先向上至 a'。而 a' 至 D 有 2 種走法(右→上, 上→右)，旋轉 180° 後得大寫 C→C'→E 的右半相應路徑，這表示由小寫 c 出發的路須走 $c \rightarrow c' \rightarrow c'' \rightarrow E$ ，方法有 1 種；又 a' 至 F 有 1 種走法(上→上)，旋轉 180° 後得大寫 C→C'→C''→G 的右半相應路徑，此時由小寫 c 出發的路徑僅有「右→右→右」至 G 1 種。總方法數 = 2×1 + 1×1 = 3 (種)。

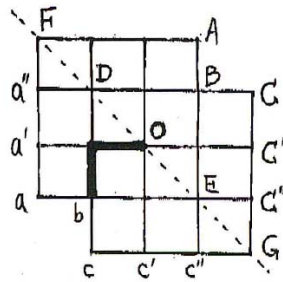
(b) b出發後走「上→右」至O: 此時a須先向上兩次至a"。而a"至D有一種走法(右), 旋轉180°後得大寫C→C'→C"→E的右半, 相應路徑, 這表示由小寫c出發的路徑須走 $c \rightarrow c' \rightarrow E$, 方法有2種; 又a"至F有1種走法(上), 旋轉180°後得大寫C→C'→C"→G的右半相應路徑, 此時由小寫c出發的路徑僅「右→右→右」至G 1種。總方法數 = $1 \times 2 + 1 \times 1 = 3$ (種)

由以上討論知共有6種可能的路徑。

(附註: 上述(a), (b)分別對應下方圖1及圖2。其實, 兩圖中任選一圖, 圖中的3個路徑都是另一圖中3個路徑對直線bb'鏡射的結果)



(圖1)

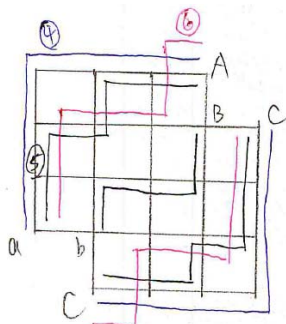
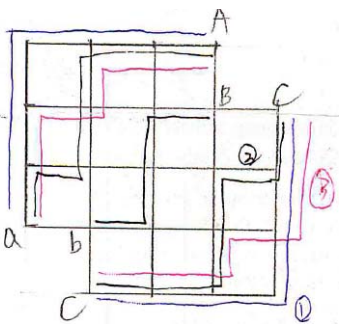


(圖2)

bb' 鏡射
的結果)

解 2: 陳彥廷的解法

因為旋轉180°後要重疊, 所以b至B只有2種走法, 而b至B決定後, 再考慮a至A之走法, 當a至A走法決定後, c至C之走法為a至A旋轉180°後之走法



此問題是從4x4的棋盤出發, 可嘗試找出在nxn棋盤上同樣的限制條件下符合條件的路徑組數。